

Maatschappelijk functioneren vraagt om creatief wiskundig denken

Wiskunde is overal

Dagelijks vraagt het maatschappelijk functioneren om wiskundige kennis en vaardigheid. Het onderwijs heeft de taak om alle leerlingen op dit wiskundig maatschappelijk functioneren voor te bereiden. Leraren doen dit door met leerlingen aspecten van dit wiskundig maatschappelijk functioneren te verkennen. Om dit te realiseren richt het onderwijs zich op het verkennen van wiskundige werken denkwijzen en het verbinden hiervan met kennis uit wiskundedomeinen (Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde, 2019). Gelukkig biedt de maatschappelijke werkelijkheid tal van mogelijkheden om deze verbinding te realiseren. Naar de wiskunde in de maatschappij moeten we echter vaak wel even zoeken, want het gaat nogal eens om wiskunde die op een (te) natuurlijke manier is ingebed in ons dagelijks leven of die nauwelijks zichtbaar is (Gravemeijer, 2001). Of, preciezer, voortdurend gebruiken we middelen die wiskundig zijn doordacht en waarvan het gebruik nodig maakt dat we deze wiskunde tot op zekere hoogte doorzien (Werkgroep Wiskunde voor Morgen, 2020). Hierbij kun je bijvoorbeeld denken aan het betalen met een pinpas waarbij, onzichtbaar voor de gebruiker, het af te rekenen bedrag verrekend wordt met het saldo van een bankrekening. Voorwaarde is daarbij dat het saldo toereikend is. En als je niet af en toe nagaat of dat zo is, door via een beveiligingscode waarvan de wiskunde leert hoe veilig die is, een overzicht te verkrijgen van wat er op de rekening staat, kan het betalen met plastic zo maar misgaan. Het rekenen aan het bedrag op de rekening gebeurt veelal onzichtbaar, terwijl zicht op deze onzichtbare wiskunde belangrijk is om goed met giraal geld te kunnen omgaan. Dat betekent

dat de gebruiker schattend moet kunnen rekenen, door getallen zo af te ronden dat gerekend kan worden met 'mooie' getallen. Verder moet de gebruiker de schematische weergave in het rekeningoverzicht accuraat kunnen interpreteren en het resultaat van deze interpretatie kunnen combineren met de uitkomsten die via schattend rekenen verkregen zijn.

Andere voorbeelden van situaties waar op een dergelijke manier wiskundige kennis nodig is om de wiskunde in de maatschappij te kunnen gebruiken, zijn het online bestellen van goederen en het volgen van de besteller die onderweg is naar je voordeur, het gebruiken van een routeplanner en het tonen van een QR-code om door een coronacheck te komen. Echter, hoewel de wiskunde waarmee we in deze situaties te maken krijgen vaak behoorlijk geavanceerd van aard is, voelen we zelden de noodzaak om de situatie helemaal wiskundig te doordenken. Dat wordt overigens wel anders als het onverhoopt mis gaat (vgl. Noss, 2002). Dan is er een noodzaak om de wiskunde echt te doorzien. We komen in actie wanneer een schema in een bestelsysteem laat zien dat bestelde goederen geleverd zijn, terwijl ze er nog helemaal niet zijn. We kijken wel uit om een weg te nemen waarvan de routeplanner, als wiskundig model van de werkelijkheid die berekent hoe je het snelst van A naar B kunt komen, aangeeft dat die er is, maar die er feitelijk niet ligt. En ook de coronacheck via de QR-code die de app genereert kan tot problemen leiden. Dat bleek in de eerste dagen na invoering van de code. Gefalsificeerde QR-codes werden op tal van plaatsen aangeboden, als alternatief voor een QR-code verkregen via vaccinatie of PCR-test. Totdat duidelijk werd dat je na het tonen van de QR-code moest

aangeven wat je geboortemaand is of met welke letter je voor- of achternaam begint en die gegevens natuurlijk niet opgeslagen lagen in de gekochte QR-code.

Als het zo 'mis' gaat of wanneer de situatie anderszins vraagt om wiskunde te herkennen, gaat het om het interpreteren van (al dan niet zichtbare) getallen, (schematische) getalsmatige gegevens en ook meetkundige uitingen om die te abstraheren van de context naar een (meer) wiskundige beschrijving (Freudenthal, 1991). We zien dat het gebruik van nieuwe technologieën hier steeds vaker om vraagt. Het gebruik daarvan appelleert namelijk vrijwel altijd aan een wiskundig geletterde of gecijferde blik op de wereld (Hoogland & Meeder, 2007) en vervolgens aan de wiskundige creativiteit om deze gecijferdheid in tal van situaties gepast te gebruiken. Het is dus van belang voor het maatschappelijk functioneren dat leerlingen in het onderwijs leren om situaties wiskundig te doorzien en hun wiskundige creativiteit te gebruiken om tot nieuwe oplossingen, aanpakken of ideeën te komen voor vraagstukken of situaties.

Wiskundige creativiteit

Creativiteit in brede zin gaat over het creëren van originele en betekenisvolle ideeën, producten of oplossingen (Plucker, Beghetto, & Dow, 2004). Een creatieve oplossing is het resultaat van een creatief proces waarop verschillende aspecten invloed hebben, zoals de omgeving, cognitieve processen en persoonlijke karakteristieken. Specifieker, met een (vak)specifieke invulling in het onderwijs vanuit wiskunde, gaat creativiteit over het bedenken van een voor de leerling nieuwe wiskundige oplossing, idee of aanpak voor een (wiskundig) vraagstuk of situatie (Schoevers, et al., 2019). Dit kan een vraagstuk of (maatschappelijke) situatie binnen of buiten de wiskunde zijn waarvoor de leerling nog geen oplossing of aanpak kent en waarvoor het nodig is om nieuwe manieren te vinden om tot een nieuwe wiskundige oplossing, aanpak of idee te komen (Mann, 2005; Schoevers, 2019). Dit vereist wiskundig creativiteit. Naast het creëren van een nieuwe wiskundige oplossing of aanpak voor een vraagstuk of situatie, spreekt men ook van wiskundige creativiteit als kennis en vaardigheden in een adequate, maar voor de leerling nieuwe manier worden gecombineerd en zo het wiskundig begrip vergroot. Dit kan zich bijvoorbeeld manifesteren in een klassendialoog. Door het combineren van kennis binnen (en buiten) de wiskunde kan er een nieuw en betekenisvol wiskundig idee of concept ontstaan. Een leerling heeft bijvoorbeeld een beperkt begrip over vormen. Hij of

zij ziet een driehoek als figuur met drie hoeken en een cirkel als rond object. Hij of zij brengt dit nog niet in verband met zijn of haar begrip van oneindigheid. De leerling toont wiskundige creativiteit, wanneer hij of zij de twee bovengenoemde concepten combineert tot een nieuwe en diepere conceptualisering van "vorm", waarbij een cirkel wordt opgevat als een veelhoek met oneindig veel zijden van oneindig kleine omvang. Hoewel dit geen nieuw idee is in de wiskunde, is het wel nieuw voor de leerling en verdiept het zijn of haar wiskundig begrip (Schoevers, et al., 2019). Om tot nieuwe wiskundige oplossingen, aanpakken of concepten te komen, kunnen leerlingen niet zomaar een strategie toepassen, maar moeten ze feiten, vaardigheden, procedures en ideeën op een nieuwe en zinvolle manier onthouden, gebruiken en combineren (Schoevers, 2019; Warner, Alcock, Coppola, & Davis, 2003). Om wiskundig creatief te denken heb je dus in voldoende mate wiskundige kennis en vaardigheden nodig. Daarnaast heb je ook algemene creatieve denkstrategieën nodig (Schoevers, Kroesbergen, & Kattou, 2018). Creatieve denkstrategieën die helpen bij het creëren van een nieuwe oplossing of nieuw concept behelzen in het bijzonder divergent en convergent denken. Divergent denken gaat over het genereren van meerdere ideeën, oplossingen en oplossingsstrategieën. Convergent denken gaat over het evalueren en selec-

Door het combineren van kennis binnen (en buiten) de wiskunde kan er een nieuw en betekenisvol wiskundig idee of concept ontstaan

teren van ideeën en oplossingen om zo te komen tot de best mogelijke oplossing van een probleem. Divergent en convergent denken helpen bij het komen tot een voor de leerling nieuwe wiskundige oplossing of aanpak, omdat het samenspel tussen deze twee denkstrategieën leerlingen in staat stelt om uit een reeks opties de meest geschikte oplossing of aanpak te kiezen (Assmus & Fritzlar, 2018; Guilford, 1973; Tabach & Levenson, 2018).

Wiskundig creatief denken is nodig bij het wiskundig oplossen en doordenken van (wiskundige) vraagstukken en situaties en is een belangrijke en functionele wiskundige competentie (Schoenfeld, 1983). Het is daarom van belang om wiskundige creativiteit te bevorderen in het reken-wiskundeonderwijs. Een ondersteunende didactiek/pedagogie is daarvoor essentieel (Schoevers, et al., 2019).

Om de wiskundige creativiteit te bevorderen is het belangrijk dat (1) leraren leerlingen de mogelijkheden bieden om wiskundig creatief te denken en (2) bij deze mogelijkheden wiskundige creativiteit van leerlingen aanmoedigen en waarderen. Door leerlingen *open* wiskundige activiteiten aan te bieden kan wiskundige creativiteit bevorderd worden. Open activiteiten hebben een zekere graad van vrijheid en onzekerheid, zoals wiskundige problemen waarbij meerdere oplossingen of oplossingsmethoden mogelijk zijn of een open wiskundig klassengesprek waarbij vooraf nog niet precies duidelijk is hoe dit gesprek gaat lopen (Beghetto & Kaufman, 2011; HersHKovitz, Peled, & Littler, 2009; Schoevers, 2019). Bij het aanbieden van open wiskundige activiteiten is het van belang dat leraren een open sfeer creëren in de klas, bijvoorbeeld door het stellen van open vragen aan leerlingen, door met interesse en respect te luisteren naar ideeën van leerlingen en op hun antwoorden door te vragen.

Onderwijs dat de ontwikkeling van creatief wiskundig denken stimuleert

Voor het bevorderen van wiskundige creativiteit is van belang om daarvoor mogelijkheden te bieden in het onderwijs, in het bijzonder door het aanbieden van open activiteiten en het redeneren van de leerlingen aan te moedigen. Dat klinkt logisch, maar kan ook complexer lijken dan het feitelijk is. Daarom presenteren we drie denkrichtingen om hier in het (reken-)wiskundeonderwijs vorm aan te geven. In ieder van deze denkrichtingen gaat het om een situatie voor leerlingen die het gebruikmaken van het creatieve proces van divergeren en convergeren uitlokt. Het gaat

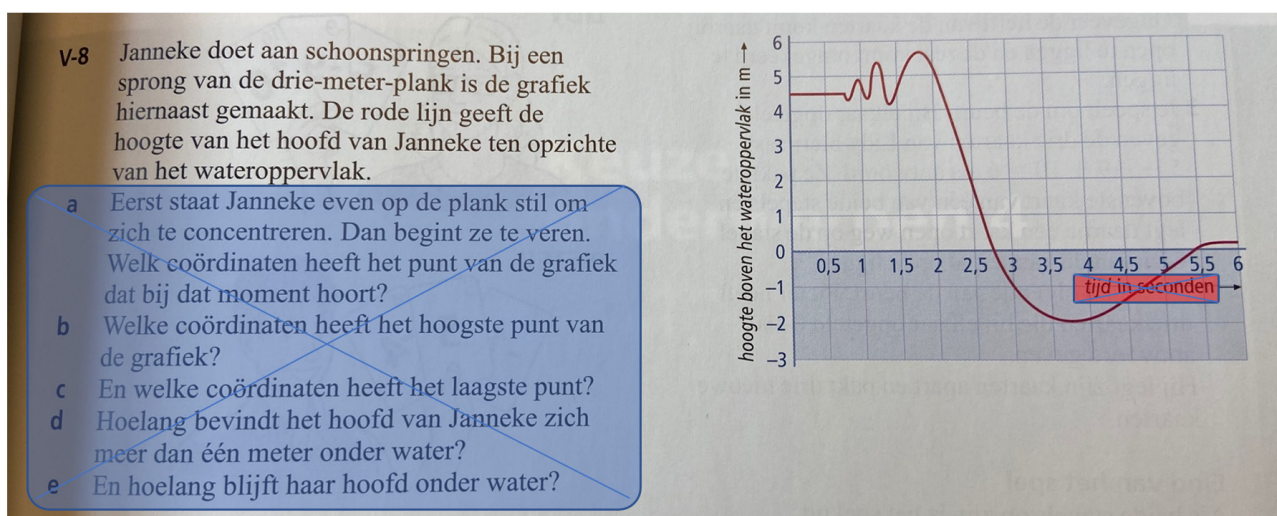
daarnaast ook om situaties die relatief eenvoudig in te passen zijn in het onderwijs.

1. Het aanpassen van een methodevraag

In methodes voor rekenen-wiskunde in het basisonderwijs en rekenen of wiskunde in het voortgezet onderwijs komen vooral gesloten vragen voor. Toch kunnen vragen, contexten of situaties uit die methodes goed als basis dienen om een open vraag te stellen aan de leerlingen om zo hun creatief wiskundig redeneren uit te lokken. Een aanpak om dit te realiseren is het aanpassen of geheel weglaten van de vraag zoals die in de methode geformuleerd is (bijvoorbeeld Keijzer & Van Galen, 2014; Den Braber, Bruin-Muurling & Keijzer, 2021). Het voorbeeld in figuur 1 laat zien hoe het weglaten van de vraag meer redeneren kan uitlokken. Door de tekst onder de grote blauwe rechthoek weg te laten en te vervangen door de opdracht: “Beschrijf de sprong van Janneke zoals die in de grafiek is weergegeven in woorden” worden leerlingen uitgedaagd om de lijn in de grafiek daadwerkelijk te interpreteren. Dit betekent nadenken over wat er op de assen staat, wat de verschillende punten betekenen en hoe bijvoorbeeld die korte golfjes links in de grafiek uitgelegd kunnen worden. Als we ook de kleine blauwe rechthoek met de beschrijving van de variabele op de x-as weglaten, ontstaat een nog rijkere situatie. Dat richt de leerlingen op de vorm van de grafiek en de mogelijke interpretatie als een tweedimensionale afbeelding van de beweging, als ware het een filmpje.

2. Een nieuwsitem kritisch beschouwen

Berichten in de media lenen zich vaak om met leerlingen in gesprek te gaan (Van den Brink-Stuber & Veldhuis, 2020). In deze gesprekken wordt de context uitgediept en



Figuur 1. Een vraag uit *Moderne Wiskunde havo/vwo 1B*.

bieden open vragen ruimte om gestelde problemen op verschillende manieren op te lossen. Leerlingen moeten aannames maken, schatten, keuzes maken over de context



Figuur 2. NOS-nieuwsbericht van 2 februari 2022

en zo navolgbaar beredeneerd tot een antwoord op de oorspronkelijke vraag komen. Het nieuwsbericht in figuur 2, wat begin februari 2022 op de NOS te zien was, biedt legio mogelijkheden om met leerlingen in gesprek te gaan en zo hun creatief wiskundig denken te stimuleren.

Het jacht van Bezos dat in het bericht besproken wordt kost 430 miljoen euro. Dat is een aanzienlijk bedrag. Hier leidt het doordenken van dit bedrag tot ontwikkeling van verbinden van de reken-wiskundige ontwikkeling met burgerschap van leerlingen: “Wat vind je ervan dat die brug uit elkaar moet om een boot van 430 miljoen euro langs te laten?”. Deze vraag lokt bespiegelingen uit hoe iemand eigenlijk aan 430 miljoen euro kan komen, hoeveel dat is, wat je eigenlijk met een boot van dat bedrag kan, wat voor andere dingen je met dat geld zou kunnen doen, en nog veel meer vragen waarbij ideeën over de maatschappij direct aan de orde komen. Ook meer direct op de wiskundige oplossingen gerichte vragen zijn mogelijk, als “Hoe kun je te weten komen hoe hoog de boot ten minste moet zijn?” of “Hoe zou je 430 miljoen euro aan contant geld kunnen verstoppen?”

3. Een vraag of serie vragen uit de wiskunde aanschouwen
 Reflectie op een serie berekeningen of vragen kunnen leiden tot creatief wiskundig denken. In dat geval vraag je niet om de uitkomst van een opgave, maar “Welke vind je makkelijk/moeilijk?” en “Waarom vind je dat?”. Verwante vragen zijn “Wat zou je aanpassen om de moeilijke vragen ook makkelijk te maken?” en de vraag “Hoe zou je het aanpakken?”. Door dergelijke vragen te stellen gaan

leerlingen niet direct in de uitreken-modus, maar worden ze gestimuleerd om te redeneren. De inrichting van het onderwijs maakt overigens dat leerlingen zich in eerste instantie richten op het uitrekenen, maar zich gaandeweg realiseren dat het antwoord nauwelijks inzicht of argumenten geeft om de keuze te onderbouwen. Van belang bij het bespreken van een dergelijke serie vragen is dat belangrijke misverstanden of juist te leren concepten centraal moeten staan. Bij het voorbeeld in figuur 3 gaat het om

Makkelijk/moeilijk	
Kies steeds van elke twee opgaven de opgave die jij het makkelijkst vindt. Omcirkel die. Je hoeft het niet uit te rekenen! Bespreek in tweetallen jullie keuzes.	
50% van 200	50% van 145
20% van 150	10% van 300
48% van 25	25% van 48
50% van 65	10% van 75
25% van 120	35% van 100
10% van 28	25% van 28

Figuur 3. Makkelijk/Moeilijk (Groot, Jonker, Veldhuis, Wijers, & Woertman, 2021)

inzicht in rekenen met procenten, in het bijzonder de mooie percentages. De opgave appelleert aan het inzicht dat het bij het berekenen van een percentage feitelijk om een vermenigvuldiging gaat. Dat is handig, omdat dan de rekenregels voor het vermenigvuldigen kunnen worden gebruikt, bijvoorbeeld dat de twee factoren in de vermenigvuldiging mogen worden omgedraaid. 48% van 25 is hetzelfde als 25% van 48.

Conclusie

We lieten zien dat maatschappelijk functioneren vraagt om creatief wiskundig denken. En omdat het de taak van het onderwijs is om leerlingen op maatschappelijk functioneren voor te bereiden, ligt het voor de hand om het stimuleren van creatief wiskundig denken daar een plek te geven. Dat vraagt echter enige creativiteit van de leraar die hiermee aan de slag gaat. In dit artikel lieten we zien wat hij of zij kan doen en hoe hij of zij alle leerlingen hierin kan meenemen.

Het stimuleren van creatief wiskundig denken vraagt om open situaties in de wiskundeles. Omdat wiskunde veel aspecten van het leven raakt, liggen dergelijke situaties

voor het opscheppen. Deze open situaties worden zo aangeboden dat ze leerlingen eerst de mogelijkheid bieden om het probleem te verkennen. Deze verkenning stimuleert aanvankelijk divergent denken, maar leidt later tot convergeren en daarmee uiteindelijk tot betekenisvolle doordenkingen van de situaties. We lieten verschillende strategieën zien om deze open situaties vorm te geven. Dat kan door op een iets andere manier om te gaan met opdrachten in de methode, een nieuwsbericht wiskundig te beschouwen of door de wiskunde zelf te doordenken, door middel van open vragen over gemaakte opgaven. Er wordt nogal eens gedacht dat dit veel vraagt van de leraar. Maar dat is gelukkig niet per definitie het geval. Immers, veel van wat er op dit moment in het onderwijs gebeurt biedt mogelijkheden om relatief eenvoudig de geschetste open situaties te creëren.

Er wordt daarnaast vaak gedacht dat het creatief wiskundig denken alleen geschikt is voor leerlingen die sterk zijn

in wiskunde. Dat is ook niet het geval. Open vragen en situaties bieden mogelijkheden voor veel verschillende aanpakken op verschillende niveaus en zijn dus ook passend voor leerlingen die minder sterk zijn in wiskunde. Daarnaast geldt met name voor leerlingen die moeite moeten doen om de wiskunde te leren, dat kennis en begrip versterkt worden als die verbonden is met de eigen leefwereld (Peltenburg, 2012). En ook het doordenken van de wiskunde is voor iedere leerling geschikt. Immers, iedere leerling ontwikkelt beelden en ideeën bij wiskunde. De abstractie van het geleerde wordt betekenisvol als dit onderdeel vormt van een netwerk van wiskundige kenniselementen en wiskundige vaardigheid. Het wordt daarmee bruikbaar in een groot aantal situaties. Die bruikbaarheid van de wiskunde maakt ook leerlingen die minder sterk zijn in wiskunde maatschappelijk redzaam. En dat is precies wat ze nodig hebben.



Literatuur

- Assmus, D., & Fritzlar, T. (2018). Mathematical Giftedness and Creativity in Primary Grades. In F. M. Singer (Red.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness. Enhancing Creative Capacities in Mathematically Promising Students* (pp. 55-82). Cham, Switzerland: Springer.
- Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2011). Teaching for creativity with disciplined improvisation. In R. K. Sawyer, *Structure and improvisation in creative teaching* (pp. 94-109). New York, NY: Cambridge University Press.
- Den Braber, N., Bruin-Muurling, G., & Keijzer, R. (2021). Ruimte voor nadenken. *Euclides*, 92(2), 4-9.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. P. (2001). *Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Groot, A., Jonker, V., Veldhuis, M., Wijers, M., & Woertman, E. (2021). *Formatief evalueren van rekenen in het mbo: Beproefde technieken om inzicht te krijgen in het leren van studenten*. 's-Hertogenbosch: ECBO.
- Guilford, J. P. (1973). *The nature of human intelligence*. New York, NY: McGraw-Hill Book Company.
- Hershkovitz, S., Peled, I., & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 255-269). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Hoogland, K., & Meeder, M. (2007). *Gecijferdheid in beeld*. Utrecht: APS.
- Keijzer, R., & Van Galen, F. (2014). De kunst van het weglaten. *Volgens Bartjens*, 34(1), 32-35.
- Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students*. Opgeroepen op februari 21, 2022, van ProQuest: <https://www.proquest.com/docview/305010927>
- Noss, R. (2002). Mathematical Epistemologies at Work [1]. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 2-13. Opgehaald van <https://www.jstor.org/stable/40248386>
- Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. (2019). *Leergebied Rekenen & Wiskunde*. Den Haag: Curriculum.nu. Opgeroepen op oktober 11, 2019, van <https://www.curriculum.nu/download/voorstellen-rekenen-wiskunde/>
- Peltenburg, M. (2012). *Mathematical potential of special education students*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Plucker, J. A., Beghetto, R. A., & Dow, G. T. (2004). Why isn't creativity more important to educational psychologists? Potentials, pitfalls, and future directions in creativity research. *Educational psychologist*, 39, 83-96. doi:10.1207/s15326985ep3902_1
- Schoenfeld, A. H. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild, world of problem solving (A review of sorts). *Learning of Mathematics*, 3, 40-47. doi:10.2307/40247835
- Schoevers, E. M. (2019). *Promoting creativity in elementary mathematics education*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Schoevers, E. M., Kroesbergen, E. H., & Kattou, M. (2018). Mathematical creativity: A combination of domain-general creative and domain-specific mathematical skills. *The Journal of Creative Behavior*, 54, 242-252. doi:10.1002/jocb.361
- Schoevers, E. M., Leseman, P. P., Slot, E. M., Bakker, A., Keijzer, R., & Kroesbergen, E. H. (2019). Promoting pupils' creative thinking in primary school mathematics: A case study. *Thinking Skills and Creativity*, 31, 323-334.
- Tabach, M., & Levenson, E. (2018). Solving a task with infinitely many solutions: Convergent and divergent thinking in mathematical creativity. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Red.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 219-242). Cham: Springer.
- Van den Brink-Stuber, S., & Veldhuis, M. (2020). Wiskunde in het nieuws. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 39(5), 41-48. Opgehaald van <https://www.volgens-bartjens.nl/documenten/archief/bartjens/vb-39-5-o-en-o-van-den-brink-wiskunde-in-het-nieuws.pdf>
- Warner, L., Alcock, L. J., Coppola, J., & Davis, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Held Jointly with the 25th Conference of PME-NA*, 4 (pp. 371-378). Opgehaald van <https://eric.ed.gov/?id=ED500860>
- Werkgroep Wiskunde voor Morgen. (2020, november 1). *Toekomstgericht reken-wiskundeonderwijs*. Opgehaald van Wiskunde voor Morgen: <https://www.rekenenwiskunde21.nl/wp-content/uploads/2020/10/toekomstprintversie.pdf>