VOLGENS BARTJENS Jaargang 42 #5 2023

Conceptueel kijken naar breuken

Kennis van het rekenen met breuken is nauwelijks van belang voor maatschappelijk functioneren. Dat ligt anders voor conceptuele kennis van dit domein. Dat is nodig om verder greep te krijgen op de wiskunde in het voortgezet onderwijs.

Ronald Keijzer,
Hogeschool IPABO.

Keijzer, R. (2023). Conceptueel kijken naar breuken. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, *42*(5), 51-65.

Een spel dat zich richt op het schattenderwijs positioneren van sommen met breuken, is een middel dat de spelers richt op het conceptueel doordenken van bewerkingen met breuken. Het blijkt ook een middel om met leraren, adviseurs en lerarenopleiders het gesprek aan te gaan over de didactiek van de breuken.

Breukenonderwijs ter discussie

Als het reken-wiskundeonderwijs het nieuws haalt, dan gaat het in het algemeen over onderwijsopbrengsten. Dat geldt bijvoorbeeld voor recent overheidsbeleid gericht op het versterken van de basisvaardigheden (Ministerie van OCW, 2022). Het maatschappelijk debat richt zich met enige regelmaat ook op specifieke domeinen. Het breukenonderwijs is een zo'n domein dat van tijd tot tijd tot maatschappelijke onrust leidt (zie bijvoorbeeld RTL Nieuws, 2019). De discussie richt zich vaak op de noodzaak van het onderwijzen van breuken. De geringe toepasbaarheid is hier debet aan. Die geringe toepasbaarheid zou volgens sommigen moeten leiden tot minder aandacht voor breuken en volgens anderen tot het beperken van het breukenonderwijs tot formeel rekenen. In het laatste geval is een argument dat breuken nu eenmaal formele objecten met formele rekenregels zijn, die je toch niet hoeft toe te passen in alledaagse situaties. Anders gezegd, na een korte betekenisvolle introductie waarin breuken zichtbaar worden als deel-geheel, is betekenis geven aan rekenregels voor breuken weinig zinvol, zo suggereert bijvoorbeeld Van de Craats (2007). Tegenover het idee dat het bij breuken vooral gaat om het snel en efficiënt inslijpen van rekenregels, staat de analyse dat leerlingen in het voortgezet onderwijs juist uitvallen op conceptuele kennis van breuken, zoals ideeën over hoe breuken globaal geordend kunnen worden op een getallenlijn (Bruin-Muurling, 2010). Een manier om dit uitvallen op conceptuele kennis te voorkomen is door al in het basisonderwijs in te gaan op de betekenis van breuken. Dat kan gedaan worden door het breukenonderwijs al vroeg te richten op de conceptuele aspecten ook al gaat het om formele objecten (Bruin-Muurling & Keijzer, 2018). In het onderwijs betekent dit bijvoorbeeld dat leerlingen onderzoeken hoe je een strookje, dat model staat voor een chocoladereep, handig in zessen kunt delen of hoe je drie pannenkoeken eerlijk kunt verdelen met z'n vieren (Streefland, 1991; Keijzer, 2003). Echter, dergelijke contexten rond het verdelen of indelen van voedsel worden nogal eens bekritiseerd vanwege hun weinig realistische karakter (Schmeier, 2017). De situaties hebben namelijk weinig van doen met het verdelen van chocoladerepen of pannenkoeken in het dagelijkse leven. Dat klopt, maar dat is ook niet de bedoeling van deze contexten. Ze voorzien in een activiteit die leerlingen richt op het conceptualiseren van breuken en het opereren ermee.

Breuken: een lastig onderwerp
Het gebrek aan toepasbaarheid is een van de zaken die breuken tot een van de moeilijkste onderwerpen in de basisschool maken. Als breuken geïntroduceerd worden is het voor kinderen vaak de eerste keer dat ze in aanraking komen met formele wiskunde, waar de verbinding met de werkelijkheid ver te zoeken is (Keijzer, 2003). Dat geldt onverkort wanneer er contexten bedacht worden die de breuken wel betekenis geven. Omdat het niet om contexten gaat met een werkelijke verbinding met alledaagse ervaringen, is er ook bij deze contexten sprake van verkenning van de abstracte wiskunde en dat maakten leerlingen in de basisschool, wanneer ze met breuken beginnen waarschijnlijk niet eerder mee. Maar er is meer dat de breuken tot een van de moeilijkste onderwerpen in het curriculum van de basisschool maakt. De notatiewijze is verwarrend. Een breuk bestaat namelijk uit twee getallen, die je feitelijk zowel moet zien als relatie tussen twee getallen, bijvoorbeeld als deling of verhouding, en als één object. Daarbij betekent een groot getal in de noemer dat het getal zelf kleiner wordt, wat verwarrend is voor leerlingen wanneer de noemer voor hen ook maar een getal is in de breuk die ze niet juist weten te interpreteren. Verder is een breuknotatie niet eenduidig, maar een representant van oneindig veel gelijkwaardige breuken. Daarnaast maakt de gekozen notatie voor breuken dat breuken niet gemakkelijk te ordenen zijn en dat het rekenen met breuken gebeurt met nogal wat ondoorzichtige rekenregels (Hasemann, 1981, p. 71).

Moeilijke didactiek
Het onderwerp ‘breuken’ is niet alleen een moeilijk onderwerp voor leerlingen, maar is dat ook voor hun leraren. Dat geldt met name als zij betekenis willen geven aan breuken en wanneer ze zich daarbij willen richten op het conceptuele karakter van breuken. Dat vraagt namelijk om gerichte aandacht voor activiteiten waarin leerlingen breuken genereren en wel zo dat het formaliseren door deze activiteiten op een natuurlijke manier aan de orde komt (Treffers, Streefland, & De Moor, 1996). In onderwijs gericht op een conceptuele verkenning van breuken is er voortdurend aandacht voor de breukentaal, namelijk de taal die je nodig hebt om dat wat je doet met breuken te beredeneren (Keijzer & Lek, 1995). Daarbij gaat het bijvoorbeeld om het beschrijven van een indeelvoorschrift die de manier van handelen beschrijft als je een breuk maakt, bijvoorbeeld dat je $\frac{5}{6}$ van een strook krijgt door de strook in zessen te delen en daarvan vijf stukjes te pakken. De breukentaal is verder nodig bij redeneringen als waarom $\frac{5}{6}$ groter is dan $\frac{5}{7}$. In dit specifieke geval gaat het om 5 stukjes van $\frac{1}{6}$ en 5 stukjes van $\frac{1}{7}$, en stukjes van $\frac{1}{7}$ zijn kleiner omdat een object in meer stukjes gedeeld is.

Breukentaal en breuken vergelijken
Het verkennen van de breukentaal vormt de basis voor het vergelijken van breuken op grond van de noemer, zoals bij het vergelijken van $\frac{5}{6}$ en $\frac{5}{7}$. Als je zo breuken vergelijkt, dan beredeneer je namelijk dat het gaat om de grootte van de stukjes. Dat wordt uitgesproken taal als iemand dit idee wil delen met een ander. En die relatie tussen het bedenken van een redenering en het verwoorden ervan geldt ook voor andere vergelijkingsstrategieën, zoals:

- vergelijken met 1, bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ is kleiner dan $\frac{6}{7}$, omdat de afstand van $\frac{5}{6}$ tot 1 groter is dan die bij $\frac{6}{7}$,
- vergelijken met $\frac{1}{2}$, bijvoorbeeld $\frac{4}{7}$ is groter dan $\frac{1}{2}$, want 3 en half stukje van $\frac{1}{7}$ is precies een half,
- vergelijken op grond van de teller, bijvoorbeeld $\frac{3}{7}$ is kleiner dan $\frac{4}{7}$, omdat het minder stukjes van $\frac{1}{7}$ zijn,
- vergelijken op grond van gelijkwaardige breuken, bijvoorbeeld $\frac{4}{7}$ en $\frac{8}{9}$, omdat $\frac{4}{7}$ gelijkwaardig is met $\frac{8}{14}$ en dat via het vergelijken op grond van de tellers zichtbaar is dat $\frac{8}{9}$ groter is (TAL-team, 2006).

Dergelijke vergelijkingsstrategieën appelleren aan het breukconcept, omdat in de redenering telkens moet worden meegewogen dat de breuk ontstaat via een indeelvoorschrift en dat daarom een grotere noemer de breuk kleiner maakt en, omgekeerd, een grotere teller groter. Verder helpt het indeelvoorschrift bij het realiseren dat breuken dicht bij 1 liggen en dat het vergelijken op grond van de afstand tot 1 perspectief biedt. Het indelen is daarnaast de voorbode voor verder indelen om zo het gebruiken van gelijkwaardige breuken in beeld te brengen, namelijk als je een strookje dat al in 6 stukken verdeeld is, verder onderverdeeld tot een in 12-en ingedeelde strook, maakt duidelijk dat je twee keer zo veel stukjes van de heringedeelde strook nodig hebt om dezelfde grootte te krijgen. Ofwel $\frac{5}{6}$ is gelijkwaardig aan $\frac{10}{12}$ omdat je in het tweede geval dezelfde stukjes krijgt, maar dan met een extra indeelmarkering.

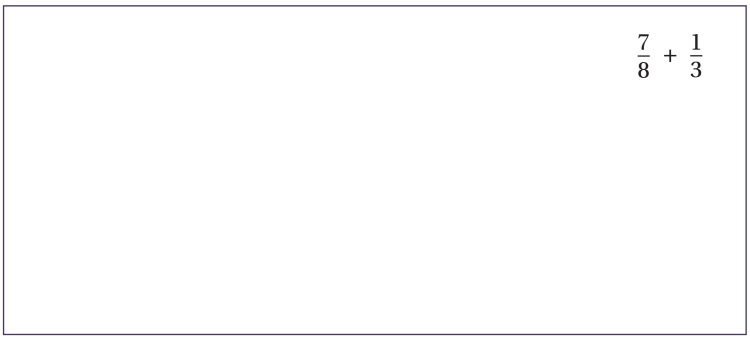
Bewerkingen

Wanneer in het onderwijs, als aangegeven, conceptueel ingestoken wordt via het vergelijken van breuken, ligt het voor de hand te bedenken hoe dit uit te breiden naar bewerkingen met breuken. Dan moet onder andere de vraag beantwoord worden of je dan ook verschillende aanpakken naast elkaar kunt gebruiken. Het gaat dan om aanpakken die vragen om een doordenking en beredenering, en niet om een precies antwoord. Dit is niet gebruikelijk, want als bij optellen en aftrekken van breuken het precieze antwoord verkregen moet worden, kan dit niet zonder ‘gelijknamig maken,’ een werkwijze waar naar gelijkwaardige breuken gezocht wordt met eenzelfde noemer. Omdat we willen inzetten op conceptueel redeneren met breuken, gaan we daarom niet voor het precieze antwoord. We stellen een andere vraag, namelijk de vraag of $\frac{7}{8} + \frac{1}{3}$ groter of kleiner dan 1 is. Dat antwoord kan bijvoorbeeld beredeneerd worden door te bedenken hoe dat zit met $\frac{7}{8}$. Die ligt maar $\frac{1}{8}$ van 1 af. Daar komt $\frac{1}{3}$ bij, want er wordt opgeteld. Dat is veel meer dan $\frac{1}{8}$, want stukjes van $\frac{1}{3}$ zijn groter dan die van $\frac{1}{8}$. Daarom is $\frac{7}{8} + \frac{1}{3}$ groter dan 1.
Iedere optel- of aftreksom met breuken kan op een dergelijke manier aangepakt worden. En daarbij is het slechts zelden nodig om te rekenen met gelijkwaardige breuken, al zijn daarvoor eerder ook de fundamenten gelegd, bijvoorbeeld in het doordenken van het vouwen van strookjes en indelen van de getallenlijn. Deze aanpak via gelijkwaardige breuken wordt op termijn belangrijk, maar voorlopig volstaat meestal het vergelijken met 1, met een half, op grond van noemer of teller. Dat is belangrijk, want juist deze strategieën bieden kansen om het conceptuele denken rond breuken te vergroten, omdat ze voortbouwen op het verwerven van een breukentaal en redeneringen die specifiek te maken hebben met breuken. Het is daarom zinvol te zoeken naar een activiteit die het vergelijken van uitkomsten van optel- en aftreksommen met breuken met 1 centraal stelt.

Vliegtuigjes richten op de getallenlijn

Omdat we bovenstaande overwegingen willen delen met leraren basisonderwijs en studenten aan de pabo, maken we een spel dat enerzijds het bedoelde denken oproept, maar ook mogelijkheden biedt hierop te reflecteren om zo zicht te krijgen op de didactiek. Het moet daarbij gaan om een spel dat ook met leerlingen gedaan kan worden. Dit leidt tot het ontwerp van een activiteit waarin de uitkomsten van optel- en aftreksommen met breuken globaal op een getallenlijn geplaatst worden: links of rechts van 1 voor een uitkomst die respectievelijk kleiner of groter dan 1 is. We willen dat dit positioneren gebeurt door vooral globaal te redeneren. Dan is een activiteit waarbij de getallenlijn op een werkblad of in een schrift staat niet geschikt. We maken daarom een (denkbeeldige) getallenlijn voor in de klas of de zaal. Deelnemers krijgen de breukensommen op een blaadje dat ze tot vliegtuigje mogen vouwen. Als het vliegtuigje eenmaal gevouwen is, staat de breukensom op een van de vleugels (afbeelding 1). Vervolgens mag er op de (denkbeeldige) getallenlijn gericht worden. Midden staat de leraar of spelleider bij ‘1’. Voor de kijkers links van de leraar of spelleider staan de uitkomsten kleiner dan 1 en aan de andere kant van hem of haar de uitkomsten groter dan 1. Op een teken van de leraar of spelleider gooien alle deelnemers hun vliegtuigje daar waar zij het antwoord op de som op de vleugel inschatten.

▶ Afbeelding 1. Vouwblad voor papieren vliegtuigje.



Bij het ontwerpen van deze activiteit hebben we overwogen dat het gooien met vliegtuigjes, als spelvorm, de deelnemers aan het spel dwingt om efficiënt te redeneren. Er is namelijk weinig gelegenheid om te gaan rekenen. Het gevouwen vliegtuig vraagt namelijk om geworpen te worden en niet om die naast een kladblaadje te leggen, waarop een berekening gemaakt wordt om de werprichting te bepalen. Verder overwogen we dat de te kiezen strategie gestuurd kon worden door geschikte keuze van sommen op de vleugels, bijvoorbeeld:

- $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$ is groter dan 1, omdat beide breuken groter dan een half zijn,
- $\frac{11}{8} - \frac{1}{3}$ is kleiner dan 1, omdat $\frac{1}{3}$ groter is dan $\frac{1}{8}$,
- $\frac{99}{100} + \frac{1}{99}$ is groter dan 1, omdat $\frac{1}{99}$ groter is dan $\frac{1}{100}$,
- $\frac{4}{7} + \frac{5}{11}$ is groter dan 1, omdat $\frac{4}{7}$ net iets meer is dan $\frac{1}{2}$ en $\frac{5}{11}$ net iets minder; de zevenden winnen het, omdat daarvan de stukjes groter zijn.

Zie bijlage 1 voor een overzicht van de sommen op de vleugels.

Beproeven

In de ontwerpfase van deze activiteit vormen de boven beschreven redeneringen hypotheses voor de reacties van deelnemers aan het vliegtuigwerpspel. Bij deze deelnemers gaat het om leraren basisonderwijs en studenten aan de lerarenopleiding basisonderwijs. Daar doen we de activiteit om het gesprek te kunnen aangaan over de breukendidactiek. Dit gesprek over de didactiek, zo is de bedoeling, wordt gefaciliteerd door het zelf ervaren van het beredeneren van uitkomsten van optel- en aftreksommen met breuken (vgl. Goffree, 1979).

Bij het spelen van het spel zien we dat de meeste deelnemers zich bedienen van de door ons bedachte redeneringen en strategieën, zoals het vergelijken met 1 of vergelijken op grond van noemer of teller. Deze strategieën blijven aanvankelijk impliciet, totdat de spelleider een geworpen vliegtuigje oppakt en de werper om toelichting vraagt. Die vraag maakt dat de aanpak expliciet gemaakt moet worden. Dat blijkt niet altijd makkelijk, wat de spelleider de kans biedt om de taal te expliciteren en de gekozen aanpakken, zoals het vergelijken met 1 en met een half, te expliciteren. Omdat globaal redeneren nadrukkelijk is toegestaan, zijn er ook deelnemers aan het spel die 'op gevoel' het vliegtuigje richten. Die mogelijkheid maakt dat iedereen kan deelnemen. Het speelse karakter van het spel maakt verder dat alle deelnemers dit ook daadwerkelijk doen. Maar ook het 'gevoel' dat de uitkomst groter of kleiner dan 1 is, is ergens op gebaseerd en nodigt uit om die intuitie te bewerken tot een steekhoudende redenering. Waarbij de redenering, zo is de ervaring, door de deelnemers wordt overgenomen, in de zin dat steeds meer deelnemers hun worp op gevoel weten te beredeneren. En dat laatste geldt zelfs als dan blijkt dat het vliegtuigje aan de verkeerde kant van de 1 ligt, omdat achteraf altijd gezegd kan worden dat dat onbedoeld is en te maken heeft met de constructie van het vliegtuigje: 'Ik wilde hem eigenlijk naar links gooien, maar hij boog af naar rechts en daarom ligt hij nu verkeerd.'

Reflectie

De activiteit leent zich, als aangegeven, ook voor leerlingen in de bovenbouw van de basisschool of de onderbouw van het voortgezet onderwijs, maar is daar nog niet uitgeprobeerd. De activiteit is wel gebruikt om met leraren en studenten aan de lerarenopleiding het gesprek aan te gaan over de breukendidactiek. Dan komt naar voren dat het schattend rekenen met breuken en de verschillende vergelijkingsstrategieën weinig aandacht krijgen in reken-wiskundemethoden. Dat neemt niet weg dat een dergelijke activiteit handvatten biedt voor de verdere ontwikkeling van breukentaal en een belangrijke opstap vormt voor het opereren met breuken. Een globale notie van de uitkomst van een som helpt vervolgens om de stap te maken naar het doorzien en gebruiken van rekenregels voor het rekenen met breuken. En die laatste stap is nuttig, want breuken heb je in het vervolgonderwijs nodig om het rekenen met verhoudingen of procenten te begrijpen. De rekenregels zijn ook nodig als er met specifieke functies gewerkt gaat worden. Hoewel je breuken niet direct leert om maatschappelijk redzaam te worden, zijn ze belangrijk voor een veelzijdig getalbegrip, zeker ook in het vervolgonderwijs. Maar dat is vooral het geval als je het onderliggende concept doorziet.

Referenties
- Bruin-Muurling, G. (2010). *The development of proficiency in the fraction.* Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.
- Bruin-Muurling, G., & Keijzer, R. (2018). Doelen voor het reken-wiskundeonderwijs van de toekomst. *Volgens Bartjens, 37*(5), 10-14.
- Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met wiskobas: onderwijsontwikkelingsonderzoek 'wiskunde en didactiek' op de pedagogische akademie.* Utrecht: IOWO.
- Hasemann, K. (1981). On Difficulties with Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 71-87.
- Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education. Fraction learning as mathematising process.* Utrecht: CDβ-Press.
- Keijzer, R., & Lek, A. (1995). Breuken: kerndoelen en formaliseren. In C. Van den Boer, & M. Dolk (Red.), *Rekenen in de bovenbouw van de basisschool* (pp. 53-64). Utrecht: Panama/HvU/Freudenthal Instituut.
- Ministerie van OCW. (2022, mei 12). *Kamerbrief Masterplan Basisvaardigheden*. Opgehaald van OpenOverheid.nl: https://open.overheid.nl/repository/ronl-87e80b67638eac706986d2467ba0db-c854000ea7/1/pdf/kamerbrief-masterplan-basisvaardigheden.pdf
- RTL Nieuws. (2019, januari 23). '*Voorstel commissie: haal breuken uit rekenonderwijs basisschool'*. Opgehaald van RTL Nieuws: https://www.rtlnieuws.nl/nieuws/nederland/artikel/4584266/voorstel-commissie-haal-breuken-uit-rekenonderwijs-basisschool
- Schmeier, M. (2017). *Effectief rekenonderwijs op de basisschool.* Huizen: Pica Uitgevers.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Dordrecht: Springer. doi:10.1007/978-94-011-3168-1
- TAL-team. (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Treffers, A., Streefland, L., & De Moor, E. (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A Breuken.* Tilburg: Zwijsen.
- Van de Craats, J. (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *NAW 5/8(2)*, 132-136.

Knowledge of operating with fractions is hardly important in daily live functioning. This is different for conceptual knowledge in this domain. This conceptual knowledge is necessary for mathematics learning in secondary education.
A game focusing at estimating the position of the results of fraction operations plus and minus is a tool that support players in conceptually thinking about fraction operations. Moreover, it enables discussion a fraction learning strand with teachers, educational advisors and teacher educators.

Bijlage 1 – Vliegtuigvouwblaadje met som op de vleugel

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{6}{11}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{5}{8}$$

$$\frac{19}{20} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{16}{11} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{100}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\frac{98}{99}+\frac{1}{100}$$

$$1\frac{1}{12} - \frac{1}{11}$$